ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES
Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère de l'Éducation Nationale
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
Tél. : 551 32-59

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE 1984

MATHEMATIQUES - 1ÈRE EPREUVE

(Voie générale)

DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

PROBLEME I

Dans tout le problème, ω désigne le nombre réel $\sqrt{3}$, $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre trois à coefficients complexes, I l'élément unité de $\mathcal{M}$ et j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Partie 1.- Pour $a,b,c \in \mathbb{C}$ (corps des nombres complexes), on pose

$$M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

Soit $\mathcal{E} = \{ M(a,b,c) / a,b,c \in \mathbb{C} \}$.

1°) a) Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathcal{M}$ définie par : $\Phi(a,b,c) = M(a,b,c)$ est linéaire et que c'est une bijection de $\mathbb{C}^3$ sur $\mathcal{E}$.

b) En déduire que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}$. Montrer que

$$I \ , \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

forment une base de $\mathcal{E}$ et que pour tous a,b,c dans $\mathbb{C}$, on a

$$M(a,b,c) = aI + bU + cV \ .$$

2°) a) Calculer U^2 et U^3 . En déduire la valeur de U^n avec $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $\mathcal{E}$ muni de l'addition et de la multiplication de $\mathcal{M}$ est un sous anneau commutatif de $\mathcal{M}$.

3°) a) Soit $A \in \mathcal{M}$. Montrer que la propriété " $\forall M \in \mathcal{E}$, $AM = MA$ " équivaut à " $AU = UA$ " .

b) Montrer que $AU = UA$ si, et seulement si, $A \in \mathcal{E}$.

4°) a) Calculer le déterminant det(M(a,b,c)) et démontrer qu'il est égal au produit:

$$(a + b\omega + c\omega^2)(a + jb\omega + j^2c\omega^2)(a + j^2b\omega + jc\omega^2)$$

b) Démontrer que lorsque a,b et c sont des nombres *rationnels* non tous nuls, M(a,b,c) est inversible (on pourra se ramener au cas où a,b,c sont des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble).

5°) a) Calculer $M(a,b,c) \times M(a,jb,j^2c) \times M(a,j^2b,jc)$

b) En déduire, lorsqu'il existe, l'inverse de M(a,b,c) et montrer qu'il appartient à $\mathcal{E}$. Soit alors $(M(a,b,c))^{-1} = M(r,s,t)$, Calculer r,s,t en fonction de a,b et c.

Partie 2.- 1°) a) Déterminer les valeurs propres de M(a,b,c). (on pourra utiliser la question 4°)a)).

b) Montrer que ces valeurs propres sont distinctes si, et seulement si, $b^3 - 3c^3 \neq 0$.

Etablir que si a, b et c sont rationnels, M(a,b,c) est diagonalisable.

2°) a) Quelles sont les valeurs propres de U ? Montrer que si $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ est un vecteur propre pour U , il l'est pour M(a,b,c), à quelle valeur propre de M(a,b,c) correspond-il ?

b) Montrer que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ sontdiagonalisables et qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}$ telle que pour tout M de $\mathcal{E}$, $P^{-1} M P$ soit diagonale. Expliciter une telle matrice P.

PROBLEME II

1°) On considère la fonction $g(x) = \text{Log}(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}$; $(x > 0)$. Tracer le graphe de cette fonction ; en déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

2°) Montrer que la fonction $y = (1 + \frac{1}{x})^x$, où x est positif, est une fonction croissante de x qui converge vers e lorsque x tend vers $+\infty$.

3°) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a :

$$\text{Log } t \leq t - 1 \quad (1)$$

4°) Soit x_k $(k=1,2,\ldots,n)$ n nombres réels positifs. En appliquant (1) à chacune des valeurs :

$$t_i = \frac{x_i}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \text{Log } x_k \leq \text{Log}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \quad (2)$$

Montrer que l'inègalité (2) est équivalente à la suivante :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \ .$$

5°) On considère les suites de terme général :

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n \ (n \geq 1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \ (n \geq 1)$$

a) Montrer que u_n converge en croissant vers e et que $v_n \leq e$ pour tout $n \geq 1$.

b) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k \text{ Log}(1 + \frac{1}{k}) \geq \int_1^n x \text{ Log}(1 + \frac{1}{x})\, dx$$

c) En appliquant l'inègalité (2) à v_n, montrer que v_n est minorée par le terme général d'une suite qui converge vers e.

En déduire que la suite v_n converge vers e .

ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES
Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère de l'Éducation Nationale
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
Tél. : 551 32-59

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE 1984

MATHEMATIQUES - 1ère EPREUVE

(Voie économique)

DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

EXERCICE I

1) A tout nombre réel x, on associe la matrice carrée d'ordre 2 :

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} 3x + 1 & 3x \\ -x & -x + 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, il existe $t \in \mathbb{R}$ (dépendant de x et y) tel que $\Phi(x).\Phi(y) = \Phi(t)$.

En posant $A = \Phi(1)$, vérifier que $A.\Phi(x) = \Phi(3x+1)$.

2) En déduire que les puissances A^n de la matrice A sont toutes de la forme : $A^n = \Phi(x_n)$ avec

$$x_n = 3x_{n-1} + 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

En posant $y_n = x_n + \frac{1}{2}$, trouver une relation simple entre y_n et y_{n-1} et en déduire l'expression explicite de x_n en fonction de n, ainsi que celle de A^n.

3) Démontrer que : $A^n = 3^n B + C$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, où B et C sont des matrices carrées d'ordre 2, indépendantes de l'entier n, que l'on déterminera.

4) Pour tout x réel, posons $A^x = 3^x B + C$. Montrer que cela permet de définir les puissances quelconques de A, en vérifiant que : A^{-1} est bien l'inverse de A et que $A^{1/2}$ est bien une racine carrée de A.

Montrer que pour tout couple de nombres réels (x,y) :

$$A^x . A^y = A^{x+y} .$$

EXERCICE II

Pour tout x réel différent de +1 et -1, posons :

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{(x^2 - 1)^2}$$

Pour tout x vérifiant $|x| < 1$, posons :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1) a) Justifier, sommairement, l'existence, la continuité et la dérivabilité de F sur l'intervalle $]-1 , 1[$.

b) Montrer, à l'aide d'un changement de variables dans l'intégrale définissant F, que F est impaire.

c) Calculer F(x) en utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle f(x). Retrouver, ainsi, les résultats de a) et b).

2) Pour $|x| \neq 1$, posons : $G(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 2}{x^2 - 1} + \text{Log}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

a) Montrer que la restriction de G à $]-1 , 1[$ est une primitive de f.

b) Etudier les variations de G en précisant son comportement aux points -1 ; +1 ; et $\pm\infty$.

c) Tracer la courbe représentative de G et montrer qu'elle admet un centre de symétrie.

EXERCICE III

D'une urne contenant, en nombre égal, des boules blanches et des boules noires, on extrait successivement six boules (avec à chaque fois, remise de la boule tirée dans l'urne).

On marque 2 points pour une boule blanche et 5 points pour une boule noire et l'on appelle S la variable aléatoire représentée par la somme des points obtenus.

a) Quelle est la loi de probabilité de S ?

b) Calculer sa moyenne $\overline{S}$ et son écart-type σ_S .

c) En utilisant l'inègalité de Bienaymé-Tchebicheff, calculer la probabilité pour que l'écart $|S - \overline{S}|$ soit > 5 ou > 10 .

d) Effectuer le même calcul en utilisant la loi de probabilité de S . Comparer les résultats .

EXERCICE IV

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 et à coefficients réels. Posons

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $Z(A) = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ MA = AM \}$.

1) Montrer que Z(A) est un espace vectoriel réel, dont une base est $\{ I , A \}$.

2) Montrer que $A^{-1} \in Z(A)$ et $A^n \in Z(A)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3) On pose pour tout entier naturel n, $A^n = u_n A + v_n I$;

a) Etablir que $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ et

$$A^n = \begin{bmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{bmatrix}$$

b) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n-1} \cdot u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n .$$

c) En remarquant que $A^{2n} = A^n . A^n$, montrer que :

$$u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2 \quad \text{et} \quad u_{2n} = u_{n-1} \cdot u_n + u_n \cdot u_{n+1}$$

4) Montrer qu'il existe une matrice inversible P et deux nombres réels α et β tels que :

$$A^n = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix} \cdot P$$

En déduire que :

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Calculer $\lim_{n \to \infty} u_n / u_{n+1}$.